შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	17.04.2011/ მათ/ II/ 146

ამოცანა № 1 გვერდი № 1

[illegible] $f(x)+f(y) \geq 2f(x+y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2f((x+y)+z) \leq f(x+y)+f(z)$$

$$4f((x+y)+z) \leq 2f(x+y)+2f(z)$$

$$2f(x+y) \leq f(x)+f(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4f(x+y+z) \leq f(x)+f(y)+2f(z).$$

$$3f(x+y+z) \leq f(x)+f(y)+f(z)+f(z)-f(x+y+z).$$

[illegible] [illegible] თუ ~~$f(x+y+$~~ $x+y+z$-ს [illegible] [illegible] $(x+y)+z$. [illegible] [illegible] [illegible]

$$3f(x+y+z) \leq f(x)+f(y)+f(z)+f(x)-f(x+y+z)$$

$$3f(x+y+z) \leq f(x)+f(y)+f(z)+f(y)-f(x+y+z)$$

თუ $f(x) < f(x+y+z)$ ან $f(y) < f(x)+f(y)+f(z)$

ან $f(z) < f(x+y+z)$ [illegible] [illegible]

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 146

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

მივიღეთ რომ სამივე უტოლობა

$3f(x+y+z) \leq f(x)+f(y)+f(z)$.

~~[illegible]~~ [illegible]

$$\begin{cases} f(x+y+z) < f(x) \\ f(x+y+z) < f(y) \\ f(x+y+z) < f(z) \end{cases}$$

ამ სამის შეკრებით მივიღებთ

$3f(x+y+z) < f(x)+f(y)+f(z)$.

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 146

ამოცანა № 2

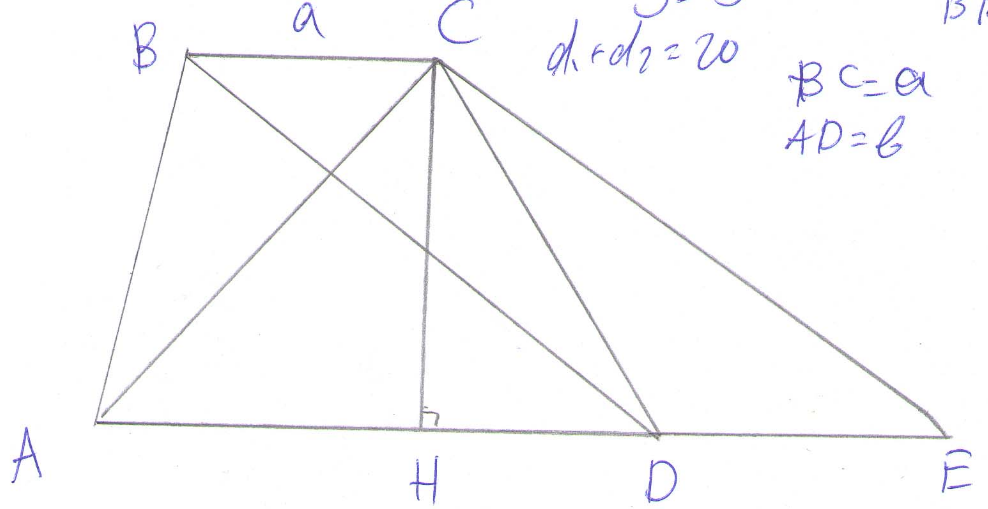
გვერდი № 1

$S=50$.

$AC=d_1$
$BD=d_2$

$d_1+d_2=20$

$BC=a$
$AD=b$



BD დიაგონალის პარალელურად ვავლებთ წრფეს წერტილ C-ში. $CE \parallel BD$.

~~BD~~ $DE=BC \Rightarrow AE=a+b$

$50=\frac{a+b}{2}\cdot h \Rightarrow$
$\Rightarrow a+b=\frac{100}{h}$.

$S_\triangle ACE = S_{ტრ.}$ რადგან $S_\triangle = h\cdot\frac{a+b}{2}$.

მ. $S_\triangle ACE=\sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-d_1\right)\left(\frac{P}{2}-d_2\right)\left(\frac{P}{2}-(a+b)\right)}$

$\frac{P}{2}=\frac{d_1+d_2+a+b}{2}=$
$=10+\frac{50}{h}$;

$d_1+d_2=20 \Rightarrow$
$\Rightarrow d_2=20-d_1$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 146

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

$$S_{\triangle ACE}=\sqrt{10\left(1+\frac{5}{h}\right)\left(10+\frac{50}{h}-\frac{100}{h}\right)\left(10+\frac{50}{h}-d_1\right)\left(10+\frac{50}{h}-10+d_1\right)}=50.$$

$$\sqrt{\cancel{100}\left(1-\frac{25}{h^2}\right)\left(\frac{50-h(d_1-10)}{h}\right)\left(\frac{50+h(d_1-10)}{h}\right)}=\cancel{50}$$

$$\left(1-\frac{25}{h^2}\right)\cdot\left(\frac{2500-h^2(d_1-10)^2}{h^2}\right)=25.$$

$$(h^2-25)\left(2500-h^2(d_1-10)^2\right)=25h^4$$

$$2500-h^2(d_1-10)^2=\frac{25h^4}{h^2-25}.$$

$$-h^2(d_1-10)^2=25(h^4-100h^2+50^2)=25(h^2-50)^2$$

[illegible] 0-[illegible] =>

$\Rightarrow d_1=10;\ h=5\sqrt{2}.\quad d_2=10=d,\quad a+b=\frac{100}{5\sqrt{2}}$

[illegible] $\sqrt{d_1^2-h^2}+\sqrt{d_2^2-h^2}=10\sqrt{2}=a+b=\frac{100}{5\sqrt{2}}$

პასუხი: $h=5\sqrt{2}$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 146

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

ნათელია რომ რიცხვთა წყვილი $(a;a;a)$ ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს. ... ამიტომ ... 2011 ...

~~$a+b+c=k\cdot a$~~ $a+b+c \vdots a \Rightarrow b+c \vdots a \Rightarrow b+c=p\cdot a$

ანუ.

$b+c=p\cdot a$ $\qquad 2a+2b+2c=p\cdot a+q\cdot b+m\cdot c$

$a+b=m\cdot c$

$a+c=q\cdot b$

$p;q;m \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ... 2-ზე მეტი ვერ იქნება.

... თუ $p=2=q=m$ ...

ვთქ. $m=1; \Rightarrow a+b=c \Rightarrow a+b+c=2c;$

... $a+b$ ... c ...

$c=a+b$ $\qquad (p-q)a=c(3-q)$

$p\cdot a=c+b$ $\qquad$ ... $q=3$

$q(c-a)=c+a$ $\qquad p=q$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 146

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

$p=q=3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+c=3\cdot b \\ c+b=3\cdot a \end{array}\right) \Rightarrow a=b$ რაც [illegible]. ანუ c [illegible] [illegible] [illegible]. ე.ი. c-[illegible] [illegible] 2-ზე. $c=2k$ სადაც k [illegible].

~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] $k; k; 2k$. [illegible] [illegible] [illegible] 2011-[illegible] 1005 [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] 2 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$1005\cdot 3=3015$. ანუ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] c [illegible] [illegible] $a=b=\frac{c}{2}$.

[illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible].

~~$c+a:b$~~ $c=a+b$

$c+a=2a+b$

$c+a=q\cdot b$

$\left.\begin{array}{l} qb=2a+b \Rightarrow 2a:b \\ \text{ანალოგ}\quad 2b:a \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} 2a=m\cdot b \\ 2b=n\cdot a \end{array}$ ~~$4ab=m\cdot n\cdot ab$~~ $m\cdot n$ [illegible] 2 [illegible]

$m;n=(1;4);(2;2)$

$(2;2)$ [illegible] [illegible]. [illegible] $a=b$.

ე.ი. $m=1; n=4 \Rightarrow 2b=4\cdot a$ $b=2\cdot a$.

[illegible] $a; 2a; a+b$; ანუ $a; 2a; 3a$; a [illegible] [illegible].

2011-[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] 335 [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $6\cdot 335$ [illegible].

[illegible]: $2011+6\cdot 335+3015$;